OLIMPADA DE MATEMATICA

ETAPA LOCALĂ

26 ianuarie 2013

BAREM

CLASA A IX-A

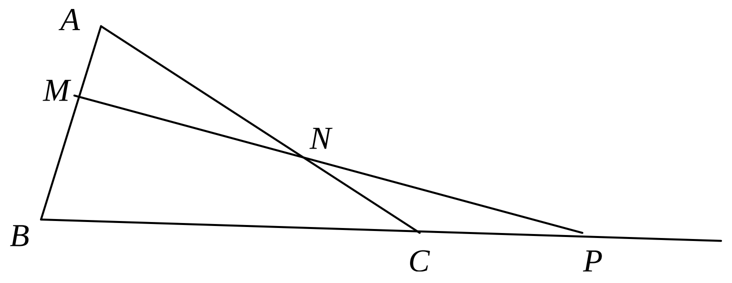
Programa TC+CD (4 ore/săpt)

1.	**Din oficiu**	**1p**
a)	Efectuând calculele și ținând cont de condiția dată se obține: $(1-a)(1-b)(1-c)+abc=ab+bc+ca$	**1p**
	Din $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0,\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$ rezultă $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$	**1p**
	De unde $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2=1$ şi $ab+bc+ca<\frac{1}{3}$. Finalizare	**2p**
b)	Observăm că $0\notin M$ şi dacă $x\in M$, atunci şi $-x\in M$, deci este suficient să determinăm elementele pozitive ale mulţimii	**1p**
	Pentru $x\in M$, $x>0$ există $k\in\mathbb{N}$ astfel încât $x^2+2013=k^2$, adică $(k-x)(k+x)=2013$	**1p**
	Descompunerea $2013=1\cdot 3\cdot 11\cdot 61$ coduce la $x\in\{14,86,334,1006\}$	**2p**
	În consecinţă $M=\{-1006,-334,-86,-14,14,86,334,1006\}$	**1p**

2.	**Din oficiu**	**1p**
	Folosind relaţia $x=[x]+\{x\},\ \forall x\in\mathbb{R}$, prin transformări succesive obţinem: $[x+\{x\}]=[x+[x]]\Leftrightarrow[x]=[2\cdot\{x\}]$(1)	**2p**
	Cazul I. Dacă $\{x\}\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, atunci ecuaţia (1) este echivalentă cu sistemul $\begin{cases}[x]=0\\ \{x\}\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\end{cases}$ cu soluţia $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$	**3p**
	Cazul II. Dacă $\{x\}\in\left[\frac{1}{2},1\right)$, atunci ecuaţia (1) este echivalentă cu sistemul $\begin{cases}[x]=1\\ \{x\}\in\left[\frac{1}{2},1\right)\end{cases}$ cu soluţia $x\in\left[\frac{3}{2},2\right)$	**3p**
	Finalizare: $S=\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{3}{2},2\right)$	**1p**

3.	**Din oficiu**	**1p**
a.)	$\vec{w}_n=a_n\vec{i}+a\grave{}_n\vec{j}=[a_1+(n-1)r]\vec{i}+[a\grave{}_1+(n-1)r\grave{}]\vec{j}=a_1\vec{i}+a\grave{}_1\vec{j}+(n-1)(r\vec{i}+r\grave{}\vec{j})=\vec{u}+(n-1)\vec{v}$	**2p**
	Dacă vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ nu sunt coliniari, atunci vectorii $\vec{w}_n$ şi $\vec{w}_k$ sunt coliniari atunci şi numai atunci, dacă $\frac{1}{1}=\frac{n-1}{k-1}\Leftrightarrow n=k$, adică fiecare vector este coliniar doar cu el însuşi, deci	**1p**

	printre vectorii $\vec{w}_n, n \in N^*$ nu există vectori coliniari diferiţi.	
	Dacă vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari, atunci există $\lambda \in R$ astfel încât $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Atunci $\vec{w}_n = \lambda\vec{v} + (n-1)\vec{v} = (\lambda + n - 1)\vec{v}$, deci toţi vectorii $\vec{w}_n, n \in N^*$ sunt coliniari. În acest caz avem: $a_1\vec{i} + a`_1\vec{j} = \lambda(r\vec{i} + r`\vec{j})$ adică $a_1 = \lambda r$ şi $a`_1 = \lambda r`$, deci condiţia să existe vectori coliniari diferiţi este $\frac{a_1}{r} = \frac{a`_1}{r`}$.	**2p**
b.)	$\vec{w}_n = a_n\vec{i} + a`_n\vec{j} = a_1q^{n-1}\vec{i} + a`_1q`^{n-1}\vec{j}$. Condiţia coliniarităţii vectorilor $\vec{w}_n$ şi $\vec{w}_k$ este $\frac{a_1q^{n-1}}{a_1q^{k-1}} = \frac{a`_1q`^{n-1}}{a`_1q`^{k-1}}$ adică $\frac{q^{n-1}}{q^{k-1}} = \frac{q`^{n-1}}{q`^{k-1}} \Leftrightarrow q^{n-k} = q`^{n-k} \Leftrightarrow \left(\frac{q}{q`}\right)^{n-k} = 1(*)$	**1p**
	Dacă $n - k$ este impar, atunci din (*) rezultă că $q = q`$, iar dacă $n - k$ este par, atunci din (*) rezultă că $q = \pm q`$	**1p**
	Prin urmare dacă $q = q`$ atunci toţi vectorii $\vec{w}_n, n \in N^*$ sunt coliniari, iar dacă $q = -q`$ atunci vectorii de indice par sunt coliniari între ei, la fel şi vectorii de indice impar.	**1p**
	Însă dacă $q \neq q`$ şi $q \neq -q`$ atunci printre vectorii $\vec{w}_n, n \in N^*$ nu există vectori coliniari diferiţi.	**1p**

4.	**Din oficiu**	**1p**
	Desen corect 	**1p**
	M, N, P sunt coliniari, aplicăm teorema lui Menelaus: $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1 \Rightarrow k \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{1}{l} = 1 \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{l}{k}$	**2p**
	obţinem $\frac{PB}{PB - BC} = \frac{l}{k} \Rightarrow PB = \frac{l}{l-k}BC$	**1p**
	$\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow MB = \frac{1}{k+1}AB$	**1p**
	$\left.\begin{array}{l} T_{AMN} = T_{ABC} - T_{MNCB} \\ T_{CNP} = T_{MBP} - T_{MNCB} \end{array}\right\| \Rightarrow T_{AMN} = T_{CNP} \Leftrightarrow T_{ABC} = T_{MBP}$	**2p**
	de unde $\frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} = \frac{MB \cdot BP \cdot \sin B}{2} \Rightarrow AB \cdot BC = \frac{1}{k+1}AB \cdot \frac{l}{l-k}BC$	**1p**
	Obţinem $\frac{l}{(k+1)(l-k)} = 1 \Rightarrow l = k+1$	**1p**